REPUBLIK INDONESIA
KEMENTERIAN HUKUM DAN HAK ASASI MANUSIA

SURAT PENCATATAN CIPTAAN

Dalam rangka pelindungan ciptaan di bidang ilmu pengetahuan, seni dan sastra berdasarkan Undang-Undang Nomor 28 Tahun 2014 tentang Hak Cipta, dengan ini menerangkan:

Nomor dan tanggal permohonan	:	EC00201945038, 5 Juli 2019
Pencipta		
Nama	:	**Prof. Ir. Binsar H. Hariandja, M.Eng., Ph.D, Ir. Jonbi, MT., MM., MSi,**
Alamat	:	Jl. Sangkuriang U-8 RT 002 RW 012 Dago-Coblong , Bandung, Jawa Barat, 40131
Kewarganegaraan	:	Indonesia
Pemegang Hak Cipta		
Nama	:	**Prof. Ir. Binsar H. Hariandja, M.Eng., Ph.D , Ir. Jonbi, MT., MM., MSi ,**
Alamat	:	Jl. Sangkuriang U-8 RT 002 RW 012 Dago Coblong , Bandung, 8, 40131
Kewarganegaraan	:	Indonesia
Jenis Ciptaan	:	**Buku**
Judul Ciptaan	:	**Matematika Dasar Untuk Teknik**
Tanggal dan tempat diumumkan untuk pertama kali di wilayah Indonesia atau di luar wilayah Indonesia	:	1 Oktober 2012, di Jakarta
Jangka waktu pelindungan	:	Berlaku selama hidup Pencipta dan terus berlangsung selama 70 (tujuh puluh) tahun setelah Pencipta meninggal dunia, terhitung mulai tanggal 1 Januari tahun berikutnya.
Nomor pencatatan	:	000145265

adalah benar berdasarkan keterangan yang diberikan oleh Pemohon.
Surat Pencatatan Hak Cipta atau produk Hak terkait ini sesuai dengan Pasal 72 Undang-Undang Nomor 28 Tahun 2014 tentang Hak Cipta.

a.n. MENTERI HUKUM DAN HAK ASASI MANUSIA
DIREKTUR JENDERAL KEKAYAAN INTELEKTUAL

Dr. Freddy Harris, S.H., LL.M., ACCS.
NIP. 196611181994031001

LAMPIRAN PENCIPTA

No	Nama	Alamat
1	Prof. Ir. Binsar H. Hariandja, M.Eng., Ph.D	Jl. Sangkuriang U-8 RT 002 RW 012 Dago-Coblong
2	Ir. Jonbi, MT., MM., MSi	Jl. R. Sanim No.9 RT 007 RW 002 Tanah Baru Beji

LAMPIRAN PEMEGANG

No	Nama	Alamat
1	Prof. Ir. Binsar H. Hariandja, M.Eng., Ph.D	Jl. Sangkuriang U-8 RT 002 RW 012 Dago Coblong
2	Ir. Jonbi, MT., MM., MSi	Jl. R. Sanim No. 9 RT 007 RW 002 Tanah Baru Beji

MATEMATIKA DASAR UNTUK TEKNIK

Bilangan, Barisan, Deret dan Fungsi Bervariabel Bebas Tunggal

Prof. Ir. Binsar H. Hariandja, M.Eng., Ph.D
Ir. Jonbi, MT., MM., MSi

JHI
Penerbit John Hi-Tech Idetama

MATEMATIKA DASAR UNTUK TEKNIK

BILANGAN, BARISAN, DERET
DAN FUNGSI BERVARIABEL BEBAS TUNGGAL

Prof. Ir. Binsar H. Hariandja, M.Eng., Ph.D
Ir. Jonbi, MT., MM., MSi

JHI

Penerbit John Hi-Tech Idetama

Matematika Dasar Untuk Teknik

Penulis: Prof. Ir. Binsar H. Hariandja, M.Eng., Ph.D
Ir. Jonbi, MT, MM, MSi

Editor: Ir. A.R. Indra Tjahjani, MT.
Pengetikan Naskah dan Penggambaran: Didi Wahyudi

Penerbit : Yayasan John Hi-Tech Idetama, Jakarta

SN = 27
Edisi pertama, cetakan pertama 2012

ISBN 978-979-1124-11-9

KATA PENGANTAR

Matematika adalah ilmu dasar yang sangat penting dan paling tua, barang kali setua umur peradaban manusia itu sendiri. Kita ingat bahwa yang paling pertama dipelajari dalam ranah kognitif, adalah pelajaran pertambahan bilangan asli pada kesempatan pertama dalam pelajaran berhitung di sekolah dasar. Dalam perkembangannya, matematika telah merasuki dunia pendidikan di hampir semua disiplin ilmu, termasuk sains, rekayasa, ekonomi dan bahkan sosial budaya.

Sebagai alat (tool) utama, khususnya dalam disiplin ilmu sains dan rekayasa, matematika memberikan dampak yang sangat luar biasa di dalam cara berfikir dan berpola-tindak dari manusia itu sendiri. Pertama, matematika mendidik manusia berfikir logis. Kedua, matematika mendidik manusia berpola-tindak secara runut dan sistematis. Ketiga, matematika membantu manusia untuk dapat manganalisis kondisi yang dihadapi, serta menentukan pilihan (decision making) yang lebih menguntungkan. Semuanya ini menuntun manusia untuk dapat melakukan proses pekerjaan secara efisien dengan hasil optimal.

Sejarah mencatat bahwa para pelaku sains, khususnya matematikawan dan para perekayasa sering mengembangkan ilmunya secara sendiri-sendiri. Para matematikawan mengembangkan ilmunya dengan dasar telaah teoritis yang kerap abstraktif serta yang jarang dibarengi dengan dasar-dasar fisis. Di lain fihak, perekayasa kerap memulai pengembangan ilmunya dengan dasar telaah fisis yang terdefinisi dengan baik (well-defined physical phenomenon), lalu mencoba menoleh kepada rumus-rumus matematika yang cocok digunakan dalam formulasi formal masalah fisis yang dihadapi. Itulah sebabnya, perumusan matematik selalu memerlukan pembuktian yang lengkap, sementara masalah rekayasa mengambil problem nyata (real physical problem) sebagai jaminan bahwa masalah yang dihadapi adalah nyata serta absah. Yang diperlukan adalah penelitian tingkat keabsahan model fisis yang digunakan serta asesmen tingkat ketelitian hasil yang diperoleh.

Inilah dasar pemikiran yang dianut penulis di dalam memulai penyusunan naskah buku matematika Dasar ini , daripada pembuktian rumus-rumus matematika yang kadang sangat rumit dan teoritis, penulis cenderung menjadikan problem-problem fisis yang riel sebagai dasar penyusunan penyataan matematika yang koresponden dengan problem fisis yang dihadapi. Sebagai contoh sederhana, formulasi kelengkungan dari suatu kurva balok yang dilentur, akhirnya bermuara kepada suatu persamaan diferensial yang secara matematis telah baku bentuknya dan lengkap dengan solusinya.

Buku ini, yang diberi judul Matematika Dasar merupakan buku referensi bagi tingkat persiapan di perguruan tinggi. Sekalipun dalam sekolah menengah telah dibahas mengenai konsep bilangan dan operasi aljabar, bahan-bahan tersebut masih tetap disajikan sebagai rangkuman. Bahan-bahan matematika tingkat perguruan tinggi lalu *ditambahkan, antara lain barisan, deret barisan dan limit, limit dan kontinuitas fungsi, bilangan kompleks, fungsi-fungsi transenden, diferensiasi dan integrasi.*

Sistematika bahasan sebagai berikut. Pertama, teorema bilangan disajikan sebagai bab pendahuluan, dilanjutkan dengan deret dan limit barisan dalam bab kedua. Selanjutnya, dasar-dasar operasi aljabar disajikan dalam bab ketiga. Bab keempat diisi dengan pembahasan sistem koordinat, fungsi dan persamaan, dilanjutkan dengan bahasan limit dan kontinuitas fungsi dalam bab kelima. Kemudian, dasar-dasar mengenai bilangan kompleks diberikan dalam bab keenam untuk merampungkan konsep bilangan yang telah dibahas untuk bilangan riel dalam bab pertama. Fungsi-fungsi transenden diberikan dalam bab ketujuh. Akhirnya, diferensiasi dan integrasi fungsi bervariabel tunggal diberikan masing-masing dalam bab kedelapan dan kesembilan.

Penulis menyampaikan terima kasih yang tulus kepada jajaran civitas academica Kelompok Keahlian Rekayasa Struktur (KKRS) Program Studi Teknik Sipil, Fakultas Teknik Sipil dan Lingkungan, serta pimpinan Institut Teknologi Bandung yang telah memberikan kesempatan dan dukungan penuh bagi penulis di dalam perampungan naskah ini. Saran dan kritik penyempurnaan yang telah penulis terima dari rekan pengajar, antara lain dari Prof. Ir. Amrinsjah Nasution, MSCE, Ph.D, Prof. Ir. Adang Surahman, MS, Ph.D, Ir. Indra Djati Sidi, MS,Ph.D dan Prof. Ir. Iswandi Imran, MASc, Ph.D, sangat bermanfaat di dalam penyempurnaan isi naskah ini.

Pengetikan dan penggambaran yang sangat menyita waktu dan tenaga di dalam memungkinkan terbitnya naskah ini, dilakukan oleh Sdr. Didi Wahyudi. Pengeditan yang dilakukan oleh Ir. A.R. Indra Tjahjani, MT dan pencetakan naskah yang oleh Penerbit Yayasan John Hi-Tech Idetama, Jakarta. Untuk semua upaya tersebut, penulis mengucapkan banyak terima kasih.

Dalam penyiapan naskah, penulis juga tetap mendapatkan dorongan dari anggota keluarga, yaitu Rd. Henniwaty (istri), Susan, Arief, Arieska, Johanna, Charles, Jonathan, David, dan Timothy (anak), serta Michael, Sakura, Karel, Aidan dan Calin (cucu). Untuk mereka itu, penulis tidak lupa menghaturkan rasa haru dan terima kasih.

Dan last but not least, penulis menghaturkan terima kasih kepada para mahasiswa, rekan perekayasa dan pembaca yang budiman, yang secara positif menyambut kehadiran dari buku ini, sebagai pelengkap buku rujukan dalam perbendaharaan pengetahuan matematika dasar yang sangat perlu di dalam peningkatan penerapan teknologi demi pembangunan nusa dan bangsa.

Bandung, Oktober 2012

Penulis

DAFTAR ISI

BAB

BAB I

TEOREMA BILANGAN

1.1 Umum

Segala sesuatu zat atau benda masing-masing diberi nama sebagai atribut pengenal sekaligus sebagai alat untuk membedakannya dari yang lain. Sebagai contoh, air, api, udara, manusia, hewan dan ribuan contoh lainnya merupakan atribut pengenal. Untuk lebih melengkapi, dapat diberikan keterangan atau informasi tambahan lainnya seperti air laut, udara gunung, manusia purba dan lain-lain. Semua informasi pelengkap yang tadi, bersifat kualitatif dan relatif, misalnya air panas untuk membedakannya dari air dingin. Seberapa panasnya melebihi air yang dingin, belum begitu jelas diterangkan. Namun, menara Petronas setinggi 500 meter, lebih tinggi 50 meter dari pada menara Sears yang tingginya 450 meter. Dalam hal ini tinggi bangunan dinyatakan dalam besaran kuantitatif, yang secara tepat dapat dibandingkan satu sama lain.

Dalam berbagai kasus, informasi kualitatif seperti yang dicontohkan di atas, dapat dilengkapi lanjut dengan deskripsi kuantitatif, seperti udara siang di Jakarta 33° C, murid sebanyak 40 orang, kecepatan angin 50 km/jam, berat bayi lahir 3.5 kilo, jarak Jakarta-Bandung 180 km, dan lain-lain. Deskripsi kuantitatif pelengkap semacam ini dinamakan bilangan. Beberapa entitas (entity) sudah dipandang cukup jika dinyatakan dalam besar *(magnitude)* saja; entitas semacam ini dinamakan besaran skalar *(scalar)*, sekalipun masih memerlukan satuan, misalnya meter, derajat, buah dan sebagainya. Namun, ada beberapa entitas yang memrlukan informasi tambahan yang penting. Misalnya, 25 km dari Jakarta ke arah timur akan menemukan Cibitung, 25 km dari Jakarta ke arah barat akan menemukan Bitung. Dalam contoh ini, arah sebagai pelengkap sangat memberikan perbedaan.

Dalam bab ini, kita akan membahas bilangan sebagai descriptor dari besaran *(magnitude)* entitas. Bahasan mencakup definisi, dasar-dasar operasi dan jenis bilangan. Dengan demikian, bahasan mengenai bilangan dalam bab ini berkisar pada deskripsi besaran skalar. Untuk besaran vektorial, maka selain magnitude, juga diperlukan descriptor lainnya, yaitu garis kerja, arah dan titik tangkap vektor. Bahasan untuk besaran semacam ini dapat diikuti dalam referensi lainnya.

1.2 Bilangan

Bilangan dapat dinyatakan dalam berbagai notasi sesuai dengan negara negeri asal dan negara penganut atau pengguna. Di antara yang ada serta banyak digunakan adalah bilangan Arab dan Romawi seperti dalam Tabel 1.2.1. Selain jenis, juga dikenal dasar atau basis bilangan, misalnya basis desimal atau denari, oktal, biner dan lain-lain. Dalam basis desimal, bilangan dimulai dari bilangan asli seperti dalam Tabel 1.2.1.

BAB II
DERET DAN LIMIT BARISAN

2.1 Umum

Deret dan limit memegang peranan yang luar biasa penting dalam matematika. Sebagai contoh, suatu fungsi sering dikembangkan atas deret yang berisikan suku-suku polinomial yang nilai-nilainya dapat dihitung dengan mudah untuk nilai variabel tertentu. Konsep diferensiasi dan integrasi membutuhkan penentuan limit dalam proses operasi. Pengambangan atas deret hanya akan bermanfaat jika bentuk pengembangan tersebut memiliki nilai limit, sekaligus untuk menjamin bahwa bentuk deret merupakan representasi yang absah dari pada fungsi yang dikembangkan. Hal-hal ini akan dibahas dalam bab-bab yang mendatang.

Di lain fihak, suatu deret sering berakhir pada suatu pendefinisian bilangan atau fungsi baru. Sebagai contoh, suatu bentuk deret khusus bermuara kepada pendefinisian suatu bilangan yang sangat penting yang dinamakan bilangan natural. Eksistensi bilangan natural ini, pada gilirannya melahirkan bentuk fungsi elementer yang dinamakan fungsi transenden. Hal ini akan dibahas dalam bab-bab mendatang.

Bab ini ditujukan bagi pembahasan deret dan limit barisan. Bahasan mencakup pendefinisian barisan, deret barisan serta penentuan tabiat serta konvergensi limit dari pada barisan.

2.2 Barisan Bilangan

Barisan (*sequence*) dari pada bilangan adalah suatu tatanan berurutan dari pada sekelompok bilangan yang masing-masing koresponden dengan urutan. Sebagai contoh, kita meninjau barisan a_i yang koresponden dengan urutan sebagai berikut.

$$\begin{array}{cccccccc} i & 1 & 2 & 3 & \cdots & k & \ldots & n \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ a_i & 1 & 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/k & \cdots & 1/n \end{array} \qquad (2.2.1)$$

Dalam hubungan berindeks seperti dalam Pers. (2.2.1), barisan terdiri atas urutan bilangan-bilangan yang untuk $i = k$ mengambil bentuk

$$a_k = \frac{1}{k} \qquad (2.2.2)$$

Dengan demikian, barisan berisikan anggota yang umumnya merupakan bilangan rasional atau riel. Untuk contoh barisan dalam Pers. (2.2.1), barisan dinyatakan dengan S dan dituliskan dalam bentuk

BAB III

OPERASI ALJABAR

3.1 Umum

Konsep dan teori dasar mengenai bilangan telah dibahas dalam bab yang terdahulu. Dalam bahasan tersebut telah dipaparkan perkembangan dari bilangan, mulai dari bilangan asli hingga bilangan kompleks. Bahasan juga mencakup aturan-aturan yang berlaku yang berlaku terhadap operasi bilangan. Operasi mencakup perjumlahan (pertambahan dan perkurangan), perkalian, perbagian, perpangkatan, pengakaran pengambilan nilai mutlak dari bilangan.

Sejauh ini, kita baru berurusan dengan bilangan-bilangan yang bernilai tetap, yang mengambil tempat kedudukan yang tetap dan definitif pada garis bilangan. Dalam bab ini, kita akan mulai memperkenalkan konsep bilangan yang dapat mengambil nilai tertentu pada segmen tertentu pada garis bilangan. Bilangan semacam ini dinamakan variabel atau peubah. Seturut dengan sifatnya sebagai bilangan, maka dalam bab ini kita akan membahas operasi aljabar yang menyangkut variabel. Selain itu, kita akan memperkenalkan konsep dasar mengenai hubungan antara beberapa variabel, baik dalam hubungan fungsional maupun hubungan geometris.

3.2 Konstanta dan Variabel

Dalam terapan, kita sering menghadapi besaran dengan nilai yang tetap atau konstan, misalnya ukuran sisi ubin 30 cm, tinggi seorang murid SD 1.35 m, suhu seorang pasien pada waktu pengukuran sesaat menunjukkan 38.5^{0}C, dan sebagainya. Dalam kasus semacam ini, dihadapi bilangan dengan besar *(magnitudo)* tetap, dan dinamakan konstanta *(constants)*, dan sering dinyatakan dengan simbol a,b,c,d dan sebagainya.

Sekarang, kita misalnya berurusan dengan ubin dari berbagai ukuran, mulai dari sisi 10 cm hingga 100 cm, atau tinggi murid SD yang bervariasi mulai dari 1.00 m (murid paling pendek) hingga 1.60 m (murid paling tinggi), atau suhu pasien yang naik turun, dari 36.5°C (di waktu malam) hingga 39.5°C (di siang hari dan rada meradang). Bilangan semacam ini dapat dinyatakan dengan suatu simbol tunggal, misalnya x,y atau z, namun dengan besar *(magnitudo)* yang berobah-obah. Bilangan semacam ini dinamakan variabel *(variables)* atau peubah.

Jika dalam contoh di atas, tinggi murid dinyatakan dengan x, dan tinggi minimum dinyatakan dengan konstanta $a=100m$ dan tingi maksimum dinyatakan dengan konstanta $b=1.60m$, maka nilai x akan bervariasi di antara kedua nilai batas tersebut hingga dituliskan

$$a \leq x \leq b \qquad (3.2.1)$$

BAB IV

SISTEM KOORDINAT, FUNGSI DAN PERSAMAAN

4.1 Umum

Bahasan mengenai bilangan dan variabel beserta operasi-operasi atas bilangan dan variabel telah disajikan dalam bab-bab sebelumnya. Khusus bagi besaran variabel yang nilainya dapat mengambil kisaran tertentu, maka diperlukan visualisasi nilai variabel tersebut dalam selang tertentu. Dalam contoh Pasal 3.6, digambarkan hubungan dari nilai-nilai variabel terhadap variabel lainnya (luas, volume dan berat dalam contoh).

Bab ini dikhususkan bagi visualisasi sebaran nilai variabel beserta visualisasi sebaran nilai tersebut dalam gambar, sketsa ataupun kurva. Untuk dapat melaksanakan visualisasi atau penggambaran tersebut, maka diperlukan apa yang dinamakan sistem koordinat. Hubungan dari satu atau beberapa variabel terhadap variabel ikutan, dinyatakan dengan apa yang dinamakan dengan fungsi. Pengambilan nilai suatu fungsi dalam besaran tertentu, dinamakan persamaan.

Bab ini secara berturutan membahas sistem koordinat, fungsi serta penggambarannya dan persamaan. Nilai-nilai variabel yang memenuhi persamaan, yang dinamakan akar-akar persamaan, juga dibahas dalam bab ini. Kumpulan dari beberapa persamaan yang dinamakan sistem persamaan simultan, juga dibahas dalam bab ini beserta penentuan akar-akar.

4.2 Sistem Koordinat

Sistem koordinat sangat bermanfaat di dalam telaah geometri, dalam kaitan penentuan tempat kedudukan suatu sistem dalam tata ruang, maupun dalam penjabaran dari bentuk konfigurasi sistem itu sendiri. Hal-hal ini dapat didasarkan pertama-tama dengan menggunakan suatu sistem koordinat untuk menentukan letak dari suatu titik bermateri dalam ruang. Telaah geometri seperti panjang, luas, bentuk dan lain-lain, dilakukan dengan bantuan sistem koordinat yang digunakan itu.

Menurut kebutuhan atau formulasi yang dihadapi, tersedia beberapa sistem koordinat, yang dalam hal ini digolongkan atas sistem koordinat satu dimensi (garis), dua dimensi (permukaan), dan tiga dimensi (ruang), seperti akan dibahas secara berurutan dalam paparan berikut.

4.2.1 Koordinat Satu Dimensi

Sistem koordinat satu dimensi, atau lazim dinamakan sistem koordinat panjang (length coordinate system) diperlihatkan dalam Gambar 4.2.1, di mana pada suatu kurva (lengkungan) terdapat titik awal i dan titik akhir j dengan lokasi yang diketahui, serta

BAB IV

SISTEM KOORDINAT, FUNGSI DAN PERSAMAAN

4.1 Umum

Bahasan mengenai bilangan dan variabel beserta operasi-operasi atas bilangan dan variabel telah disajikan dalam bab-bab sebelumnya. Khusus bagi besaran variabel yang nilainya dapat mengambil kisaran tertentu, maka diperlukan visualisasi nilai variabel tersebut dalam selang tertentu. Dalam contoh Pasal 3.6, digambarkan hubungan dari nilai-nilai variabel terhadap variabel lainnya (luas, volume dan berat dalam contoh).

Bab ini dikhususkan bagi visualisasi sebaran nilai variabel beserta visualisasi sebaran nilai tersebut dalam gambar, sketsa ataupun kurva. Untuk dapat melaksanakan visualisasi atau penggambaran tersebut, maka diperlukan apa yang dinamakan sistem koordinat. Hubungan dari satu atau beberapa variabel terhadap variabel ikutan, dinyatakan dengan apa yang dinamakan dengan fungsi. Pengambilan nilai suatu fungsi dalam besaran tertentu, dinamakan persamaan.

Bab ini secara berturutan membahas sistem koordinat, fungsi serta penggambarannya dan persamaan. Nilai-nilai variabel yang memenuhi persamaan, yang dinamakan akar-akar persamaan, juga dibahas dalam bab ini. Kumpulan dari beberapa persamaan yang dinamakan sistem persamaan simultan, juga dibahas dalam bab ini beserta penentuan akar-akar.

4.2 Sistem Koordinat

Sistem koordinat sangat bermanfaat di dalam telaah geometri, dalam kaitan penentuan tempat kedudukan suatu sistem dalam tata ruang, maupun dalam penjabaran dari bentuk konfigurasi sistem itu sendiri. Hal-hal ini dapat didasarkan pertama-tama dengan menggunakan suatu sistem koordinat untuk menentukan letak dari suatu titik bermateri dalam ruang. Telaah geometri seperti panjang, luas, bentuk dan lain-lain, dilakukan dengan bantuan sistem koordinat yang digunakan itu.

Menurut kebutuhan atau formulasi yang dihadapi, tersedia beberapa sistem koordinat, yang dalam hal ini digolongkan atas sistem koordinat satu dimensi (garis), dua dimensi (permukaan), dan tiga dimensi (ruang), seperti akan dibahas secara berurutan dalam paparan berikut.

4.2.1 Koordinat Satu Dimensi

Sistem koordinat satu dimensi, atau lazim dinamakan sistem koordinat panjang (length coordinate system) diperlihatkan dalam Gambar 4.2.1, di mana pada suatu kurva (lengkungan) terdapat titik awal i dan titik akhir j dengan lokasi yang diketahui, serta

BAB V

LIMIT DAN KONTINUITAS FUNGSI BERVARIABEL BEBAS TUNGGAL

5.1 Umum

Konsep dasar, definisi, jenis dan penggambaran grafik serta identitas fungsi-fungsi bervariabel bebas tunggal telah dibahas dalam Bab IV, baik untuk fungsi eksplisit maupun implisit, dalam sistem koordinat Cartesius maupun koordinat polar. Bahasan tersebut dilakukan dengan asumsi bahwa nilai fungsi terdefinisi untuk setiap nilai variabel bebas. Namun di dalam terapan, sering dihadapi kasus di mana nilai suatu fungsi tidak terdefinisi untuk nilai variabel bebas tertentu. Salah satu contoh dari kasus semacam ini adalah

$$y = f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} \tag{5.1.1}$$

yang tidak memiliki nilai, atau tidak terdefinisi untuk $x=1$. Dan memang, kasus-kasus semacam ini sering dijumpai dalam kasus fungsi pecahan atau rasional yang melibatkan fungsi-fungsi polinomial atau fungsi trigonometrik sebagai fungsi penyebut (denominator), misalnya

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x \quad (a) \qquad & f(x) &= \cos ec\, x = \frac{1}{\sin x} \quad (c) \\ f(x) &= \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x \quad (b) \qquad & f(x) &= \sec x = \frac{1}{\cos x} \quad (d) \end{aligned} \tag{5.1.2}$$

Fungsi-fungsi $\tan x$ dan $\sec x$ tidak terdefinisi untuk $\cos x = 0$ atau $x = (2k+1)\pi/2;\ k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, sementara $\cot x$ dan $\csc x$ tidak terdefinisi untuk $\sin x = 0$ atau $x = k\pi, k = \pm1, \pm2, \ldots$. Selanjutnya, kita meninjau kasus-kasus seperti

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad (a); \quad f(x) = \frac{x-1}{x^2-1} \quad (b); \quad f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} \quad (c) \tag{5.1.3}$$

Untuk kasus fungsi dalam Pers. (5.1.3a) kita melihat bahwa fungsi jelas tidak terdefinisi untuk $x=0$, sekalipun fungsi pembilang sin x dan fungsi penyebut x terdefinisi untuk titik tersebut. Kedua fungsi lainnya tidak terdefinisi masing-masing untuk $x=-1$ dan $x=+1$, serta untuk $x=+1$.

Yang menarik dalam hal ini adalah, berapa nilai yang didekati oleh fungsi jika x mendekati suatu nilai tertentu, misalnya nilai di mana fungsi tidak terdefinisi; dalam

BAB VI

TEOREMA DASAR BILANGAN KOMPLEKS

6.1 Umum

Sejauh ini, kita baru mempelajari bilangan riel, yang terdiri dari bilangan asli, bilangan bulat, pecahan, rasional dan irasional. Untuk melengkapi jenis bilangan, maka di dalam bab ini kita akan mempelajari bilangan imajiner sebagai satu jenis bilangan, yang jika dikombinasikan dengan bilangan riel, akan memberikan bilangan kompleks (*complex number*).

Untuk keperluan twersebut, kita kembali kepada perpangkatan bilangan yang diberikan dalam Pasal 1.6 yang lalu. Jika kita menghitung perpangkatan dari bilangan, misalnya +1 dan -1, maka akan diperoleh

$$\begin{aligned}
(+1) &= (+1)^1 = +1 & (-1) &= (-1)^1 = -1 \\
(+1)(+1) &= (+1)^2 = +1 & (-1)(-1) &= (-1)^2 = +1 \\
(+1)(+1)(+1) &= (+1)^3 = +1 & (-1)(-1)(-1) &= (-1)^3 = -1 \\
(+1)(+1)(+1)(+1) &= (+1)^4 = +1 & (-1)(-1)(-1)(-1) &= (-1)^4 = +1
\end{aligned} \tag{6.1.1}$$

Terlihat bahwa pangkat dari +1 untuk semua orde adalah +1, yaitu

$$(+1)^n = +1 \qquad n = 1,2,... \tag{6.1.2}$$

sementara pangkat ganjil dari -1 adalah -1, dan pangkat genap -1 adalah +1, yaitu

$$(-1)^{2n-1} = -1; \ (-1)^{2n} = +1; \qquad n = 1,2,3,... \tag{6.1.3}$$

Sekarang, kita menguji kelengkapan (*completeness*) dari jenis bilangan yang kita telah pelajari hingga kini, dengan meninjau suatu problem yang sangat sederhana, berupa penentuan akar-akar dari persamaan kuadrat

$$x^2 + 1 = 0 \tag{6.1.4}$$

yang dapat dituliskan dengan format

$$x^2 = -1 \tag{6.1.5}$$

Ini berarti bahwa kita harus menemukan semua bilangan yang memenuhi persamaan, yang dalam contoh ini berjumlah dua buah. Secara spontan kita mencoba mencari akar-

BAB VII

FUNGSI-FUNGSI TRANSENDEN

7.1 Umum

Dalam bab ini akan dibahas beberapa jenis fungsi yang tergolong di dalam apa yang dinamakan fungsi transenden. Semua jenis fungsi semacam ini dapat dipandang sebagai berakar kepada bilangan ekponensial, atau kepada logaritma yang merupakan inversi dari pada eksponensial. Sementara kalangan sering memulai pendefinisian fungsi transenden dari konsep turunan sebagai bahan bahasan yang akan disajikan dalam bab berikutnya. Dalam bab ini, pendefinisian dari fungsi transenden akan kita inisiasi dari konsep eksponensial.

Fungsi-fungsi transenden sangat penting dan memegang peranan dalam matematika. Sebagai contoh, solusi dari persamaan diferensial yang merepresentasikan berbagai fenomena fisis seperti vibrasi, rambat gelombang, rambat suhu dan lain-lain sering dikaitkan dengan solusi yang terdiri atas fungsi transenden.

Dalam bab ini dibahas beberapa jenis fungsi transenden, yang secara berturutan dimulai dari fungsi eksponensial, fungsi logaritma, hiperbolis serta fungsi inversi yang berkaitan.

7.2 Fungsi Eksponensial

Fungsi eksponensial elementer mengambil bentuk dalam format

$$y = f(x) = a^x ; \quad a > 0, -\infty < x < +\infty \tag{7.2.1}$$

di mana a adalah konstanta riel yang dinamakan basis dari pada eksponen. Suatu bentuk khusus fungsi eksponensial adalah yang menggunakan bilangan natural e yang diberikan oleh

$$e = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \tag{7.2.2}$$

dengan nilai

$$e = 2.718\ 281\ 828\ 459\ 045... \tag{7.2.3}$$

sebagai basis, dalam bentuk

$$y = f(x) = e^x ; \quad -\infty < x < +\infty \tag{7.2.4}$$

Kurva dari fungsi eksponensial dalam Pers.(7.2.1) untuk beberapa nilai basis a, ditunjukkan dalam Gambar 7.2.1.

BAB VIII

DIFERENSIASI FUNGSI BERVARIABEL TUNGGAL

8.1 Umum

Proses yang dinamakan diferensiasi atau penurunan dari suatu fungsi, merupakan aspek yang sangat penting dalam matematika. Jika teorema dasar bilangan, operasi aljabar, fungsi dan beberapa aspek lainnya telah dipelajari dalam tingkat sekolah dasar dan menengah, maka diferensiasi merupakan bahan yang baru dipelajari dalam tingkat permulaan sekolah tinggi.

Dalam kehidupan sehari-hari, sangat banyak fenomena fisis yang kita hadapi dan alami serta dapat difahami secara kualitatif, namun belum bisa dijabarkan secara kuantitatif, tanpa mempelajari diferensiasi. Dengan demikian, sebelum kita membahas diferensiasi secara matematis, ada baiknya kita terlebih dahulu membahas beberapa contoh fenomena fisis, yang nantinya akan bermuara serta akhirnya berurusan dengan aspek diferensiasi.

Sebagai contoh pertama, kita memantau perjalanan mobil dari seorang pengemudi bernama Cucun yang berangkat dari Jakarta menuju Bandung. Riwayat perjalanannya sejak berangkat yang secara menyeluruh telah melintasi S (180 kilometer) dalam waktu T (3 jam), digambarkan dalam kurva lintasan yang ditunjukkan dalam Gambar 8.1.1. Pada saat berangkat dari Jakarta dan saat hampir tiba di Bandung, waktu yang dibutuhkan relatif lama dalam melintasi jarak yang pendek. Ini berarti bahwa kecepatan pada saat start dan finish, kecepatan mobil relatif kecil yang ditandai dengan kurva yang relatif lebih landai.

Untuk lebih matematis, perjalanan S dipandang sebagai fungsi waktu yang ditandai dengan parameter t, yaitu

$$S = S(t) \qquad (8.1.1)$$

yang digambarkan dalam tata sumbu Cartesius dengan S yang diukurkan pada ordinat dan t pada absis. Tentu saja, kecepatan kendaraan tidak konstan sepanjang masa lintas 3 jam itu, karena berbagai rintangan dan kendala terrain (tanjakan atau turunan). Akan tetapi, kita dapat mendefinisikan suatu kecepatan rata-rata sebesar

$$\bar{V} = \frac{S}{T} = \frac{180\,km}{3\,jam} = 60\ km\,/\,jam \qquad (8.1.2)$$

Tentulah bisa difahami bahwa hasil dalam Pers.(8.1.2) tidak cukup untuk menerangkan riwayat kecepatan kendaraan sepanjang waktu lintas. Untuk itu, kita dapat

BAB IX

INTEGRASI FUNGSI BERVARIABEL TUNGGAL

9.1 Umum

Segala sesuatu di alam ini dapat dicarikan beberapa perihal yang berpadanan secara antagonistis. Sebutlah beberapa contoh, misalnya antara panas dan dingin, tinggi dan rendah, besar dan kecil dan sebagainya. Dalam ruang lingkup matematika juga ada padanan yang antagonistis, seperti pertambahan dan perkurangan, perkalian dan perbagian, eksponensial dan logaritma dan sebagainya.

Dalam bahasan bab ini, kita akan mempelajari suatu topik baru yang dinamakan integrasi (*integration*), sebagai suatu proses yang merupakan antagonistis dari pada proses diferensiasi. Dalam hal ini, integrasi dari suatu fungsi diartikan sebagai mencari suatu fungsi yang jika didiferensir, akan menghasilkan fungsi yang diminati tadi. Sayangnya, tidak ada suatu kaidah apapun yang dapat digunakan untuk secara metodis dapat menolong integrasi fungsi tadi.

Dalam hal ini, kita terpaksa mengingat kembali diferensiasi dari fungsi-fungsi elementer. Fungsi yang akan diintegrasikan diolah dalam format yang terdiri atas suku-suku yang semuanya merupakan diferensiasi fungsi elementer. Dengan demikian, integrasi suku-suku tadi secara langsung dipilih sebagai fungsi yang jika didiferensir akan menghasilkan suku-suku itu sendiri. Dengan perkataan lain, proses integrasi dilakukan dengan jalan membalikkan proses diferensiasi.

9.2 Konsep Dasar Integrasi

Dalam pasal terdahulu, dikatakan bahwa integrasi merupakan proses kebalikan dari proses diferensiasi. Untuk menerangkan hal ini, maka pandanglah suatu fungsi bervariabel tunggal $F(x)$ yang jika diturunkan, menghasilkan fungsi turunan $f(x)$ yang merupakan hasil limit dari pada bentuk

$$\frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = f(x) = \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} \tag{9.2.1}$$

Dari bentuk Pers. (9.2.1) dapat diperoleh suatu bentuk modifikatif

$$F(x+\Delta x) = F(x) + f(x)\Delta x \tag{9.2.2}$$

Pandanglah contoh di atas dengan prosedur yang berbalikan, di mana suatu fungsi $f(x)$ yang merupakan turunan dari pada $F(x)$, ditinjau pada domain $[x, x+\Delta x]$ sebagai sub-domain dari domain awal $[a,b]$ seperti dalam Gambar 9.2.1 berikut ini. Untuk $x = a$, Pers. (9.2.2) memberikan

BAB X
INTEGRASI TAK WAJAR

10.1 Umum

Konsep dasar, definisi, jenis dan penggambaran grafik serta identitas fungsi-fungsi bervariabel bebas tunggal telah dibahas dalam Bab IV, baik untuk fungsi eksplisit maupun implicit, dalam system koordinat Kartesius maupun koordinat polar. Bahasan tersebut dilakukan dengan asumsi bahwa nilai fungsi terdefinisi untuk setiap nilai variabel bebas. Namun di dalam terapan, sering dihadapi kasus di mana nilai suatu fungsi tidak terdefinisi untuk nilai variabel bebas tertentu. Salah satu contoh dari kasus ini telah diberikan dalam Bab IV yaitu

$$y = f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \qquad (5.1.1)$$

6.2 Konsep Limit

Sebelum membahas limit secara konsepsional kita mempelajari beberapa kasus pendekatan nilai fungsi terlebih dahulu, yaitu memantau perilaku fungsi pada saat x mendekati (tidak menyamai) suatu nilai tertentu. Sebagai contoh pertama, kita meninjau fungsi

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2 - 1} \qquad (5.2.1)$$

6.3 Definisi Limit

Sekarang kita siap membahas konsep limit sebagai berikut. Untuk x yang mendekati nilai a dari sebelah kiri maka nilai limit fungsi f(x) didekati dari kiri, dinyatakan sebagai L_l dan dituliskan dalam format

$$\lim_{x \to a} f(x) = L_l \qquad (5.3.1)$$

5.4 Beberapa Teorema Limit

PUSTAKA TAMBAHAN

1. Fort, T., *Differential Equations,* Holt, Rinehart and Winston, Inc., edisi pertama (1960).

2. Hildebrand, F.B., *Advanced Calculus for Applications,* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, edisi kedua (1976).

3. Hornbeck, R.W., *Numerical Methods,* QPI Series, Quantum Publishers, Inc., New York (1975).

4. Purcell, E.J., dan D. Varberg, *Calculus with Analytic Geometry,* terjemahan oleh Penerbit Erlangga, Jakarta (1987).

5. Stroud, K.A., dan D.J. Booth, *Engineering Mathematics,* terjemahan oleh Penerbit Erlangga, Jakarta (2001).

Binsar Halomoan Hariandja lahir di Pangaribuan 9 Juli 1948. Setelah lulus dari Sekolah Menengah Atas (SMA) Tarutung Tahun 1966, penulis meneruskan studi di Departemen Teknik Sipil, Institut Teknologi Bandung dan lulus sarjana teknik Tahun 1972. Pendidikan lanjut diperolehnya dari Asian Institute of Technology, Bangkok, Thailand (Master of Engineering, 1975); University of Illinois at Urbana-Champaign, USA (Philosophy of Doctor, 1985); Kursus Singkat Angkatan (KSA-IV), Lembaga Ketahanan Nasional (Lemhannas), Departemen Pertahanan dan Keamanan Republik Indonesia Tahun 1994; dan Kursus Applied Approach, Dikti, Departemen Pendidikan dan Kebudayaan Republik Indonesia Tahun 1990.

Sejak Tahun 1973, mengajar di Jurusan Teknik Sipil, Institut Teknologi Bandung dan Tahun 1999 diangkat sebagai Guru Besar Teknik Sipil. Penulis mengajar bahan kuliah mekanika teknik, struktur beton bertulang dan metoda elemen hingga. Penulis adalah pemegang hak patent 4 (empat) sistem struktur beton pracetak dan aktif dalam penyusunan Peraturan Beton Indonesia.

Lahir di Lampung, memperoleh gelar Sarjana Teknik Sipil (Ir) dari ISTN Jakarta, S2 Magister Teknik Sipil (MT) dari Universitas Indonesia (UI), S2 Magister Manajemen (MM) dari IPWI dan Magister Sains (MSi) dari Universitas Indonesia (UI). Sedang menyelesaikan Program Doktor Teknik Sipil di Institut Teknologi Bandung (ITB).

Mengawali karir pada perusahaan Multi Nasional kimia konstruksi, selanjutnya mendirikan perusahaan John Hi-Tech Contrindo tahun 1994 yang bergerak di bidang kimia konstruksi dan Concrete repair, PT John Idetama Teknik tahun 1997 bergerak di bidang produk inovasi, dan Yayasan John Hi-Tech Idetama bergerak dalam bidang Pelatihan, Seminar, dan Penerbitan. Dosen Teknik Sipil di Universitas Pancasila, Jakarta dan tergabung dalam beberapa organisasi profesi seperti AII, IAPPI, dan Masyarakat Nano Indonesia.

JHI
Penerbit John Hi-Tech Idetama
Jl. Rawa Bambu Raya No 17 A
Pasar Minggu Jakarta 12520
Telp. 021-7827947 Fax. 021-7827966
e-mail: jbg@cbn.net.id

ISBN 978-979-1124-11-9
9 789791 124119