REPUBLIK INDONESIA
KEMENTERIAN HUKUM DAN HAK ASASI MANUSIA

SURAT PENCATATAN
CIPTAAN

Dalam rangka pelindungan ciptaan di bidang ilmu pengetahuan, seni dan sastra berdasarkan Undang-Undang Nomor 28 Tahun 2014 tentang Hak Cipta, dengan ini menerangkan:

Nomor dan tanggal permohonan	:	EC00201945038, 5 Juli 2019
Pencipta		
Nama	:	**Prof. Ir. Binsar H. Hariandja, M.Eng., Ph.D, Ir. Jonbi, MT., MM., MSi,**
Alamat	:	Jl. Sangkuriang U-8 RT 002 RW 012 Dago-Coblong , Bandung, Jawa Barat, 40131
Kewarganegaraan	:	Indonesia
Pemegang Hak Cipta		
Nama	:	**Prof. Ir. Binsar H. Hariandja, M.Eng., Ph.D , Ir. Jonbi, MT., MM., MSi ,**
Alamat	:	Jl. Sangkuriang U-8 RT 002 RW 012 Dago Coblong , Bandung, 8, 40131
Kewarganegaraan	:	Indonesia
Jenis Ciptaan	:	**Buku**
Judul Ciptaan	:	**Matematika Dasar Untuk Teknik**
Tanggal dan tempat diumumkan untuk pertama kali di wilayah Indonesia atau di luar wilayah Indonesia	:	1 Oktober 2012, di Jakarta
Jangka waktu pelindungan	:	Berlaku selama hidup Pencipta dan terus berlangsung selama 70 (tujuh puluh) tahun setelah Pencipta meninggal dunia, terhitung mulai tanggal 1 Januari tahun berikutnya.
Nomor pencatatan	:	000145265

adalah benar berdasarkan keterangan yang diberikan oleh Pemohon.
Surat Pencatatan Hak Cipta atau produk Hak terkait ini sesuai dengan Pasal 72 Undang-Undang Nomor 28 Tahun 2014 tentang Hak Cipta.

a.n. MENTERI HUKUM DAN HAK ASASI MANUSIA
DIREKTUR JENDERAL KEKAYAAN INTELEKTUAL

Dr. Freddy Harris, S.H., LL.M., ACCS.
NIP. 196611181994031001

LAMPIRAN PENCIPTA

No	Nama	Alamat
1	Prof. Ir. Binsar H. Hariandja, M.Eng., Ph.D	Jl. Sangkuriang U-8 RT 002 RW 012 Dago-Coblong
2	Ir. Jonbi, MT., MM., MSi	Jl. R. Sanim No.9 RT 007 RW 002 Tanah Baru Beji

LAMPIRAN PEMEGANG

No	Nama	Alamat
1	Prof. Ir. Binsar H. Hariandja, M.Eng., Ph.D	Jl. Sangkuriang U-8 RT 002 RW 012 Dago Coblong
2	Ir. Jonbi, MT., MM., MSi	Jl. R. Sanim No. 9 RT 007 RW 002 Tanah Baru Beji

MATEMATIKA LANJUT UNTUK TEKNIK

DERET, TRANSFORMASI LAPLACE, FUNGSI BERVARIABEL KOMPLEKS DAN PERSAMAAN DIFERENSIAL

Prof. Ir. Binsar H. Hariandja, M.Eng., Ph.D
Ir. Jonbi, MT., MM., MSi

JHI
Penerbit John Hi-Tech Idetama

MATEMATIKA LANJUT UNTUK TEKNIK

DERET, TRANSFORMASI LAPLACE, FUNGSI BERVARIABEL KOMPLEKS DAN PERSAMAAN DIFERENSIAL

Prof. Ir. Binsar H. Hariandja, M.Eng., Ph.D
Ir. Jonbi, MT., MM., MSi

JHI Penerbit John Hi-Tech Idetama

Matematika Lanjut Untuk Teknik

Penulis: Prof. Ir. Binsar H. Hariandja, M.Eng., Ph.D
Ir. Jonbi, MT, MM, MSi

Editor: Ir. A.R. Indra Tjahjani, MT.
Pengetikan Naskah dan Penggambaran: Didi Wahyudi

Penerbit : Yayasan John Hi-Tech Idetama, Jakarta
SN = 30
Edisi pertama, cetakan pertama 2012

ISBN 978-979-1124-12-6

KATA PENGANTAR

Perkembangan matematika telah merasuki dunia pendidikan di hampir semua disiplin ilmu, termasuk sains, rekayasa, ekonomi dan bahkan sosial budaya. Matematika memberikan dampak yang sangat luar biasa di dalam cara berfikir dan berpola-tindak dari manusia itu sendiri. Pertama, matematika mendidik manusia berfikir logis. Kedua, matematika mendidik manusia berpola-tindak secara runut dan sistematis. Ketiga, matematika membantu manusia untuk dapat manganalisis kondisi yang dihadapi, serta menentukan pilihan (decision making) yang lebih menguntungkan. Semuanya ini menuntun manusia untuk dapat melakukan proses pekerjaan secara efisien dengan hasil optimal.

,Penulis cenderung menjadikan problem-problem fisis yang riel sebagai dasar penyusunan penyataan matematika yang koresponden dengan problem fisis yang dihadapi. Sebagai contoh sederhana, formulasi vibrasi system struktur tali, membran atau balok disusun berdasarkan telaah keseimbangan fisis, dan akhirnya analisis bermuara kepada suatu persamaan diferensial yang secara matematis telah baku lengkap dengan solusinya.

Bahasan dalam buku ini dibagi sebagai berikut. Pertama, teorema deret disajikan dalam dua bab pembuka, dilanjutkan dengan dasar-dasar transformasi Laplace dalam bab ketiga. Kemudian, bahasan dilanjutkan dengan pembahasan fungsi bervariabel kompleks dalam bab keempat. Bahasan mengenai konsep dasar persamaan diferensial diberikan dalam bab kelima, dilanjutkan dengan bahasan berbagai kasus persamaan diferensial dalam bab-bab berikutnya.

Dalam kesempatan ini, penulis menghaturkan rasa hormat dan terima kasih yang tulus kepada jajaran civitas academica Kelompok Keahlian Rekayasa Struktur (KKRS) Program Studi Teknik Sipil, Fakultas Teknik Sipil dan Lingkungan, serta pimpinan Institut Teknologi Bandung yang telah memberikan kesempatan dan dukungan penuh bagi penulis di dalam perampungan naskah ini. Saran dan kritik penyempurnaan yang telah penulis terima dari rekan pengajar, antara lain dari Prof. Ir. Amrinsjah Nasution, MSCE, Ph.D, Prof. Ir. Adang Surahman, MS, Ph.D, Ir. Indra Djati Sidi, MS,Ph.D dan Prof. Ir. Iswandi Imran, MASc, Ph.D sangat bermanfaat di dalam penyempurnaan isi naskah ini.

Pengetikan dan penggambaran yang sangat menyita waktu dan tenaga di dalam memungkinkan terbitnya naskah ini, dilakukan oleh Sdr. Didi Wahyudi. Pengeditan yang dilakukan oleh Ir. A.R. Indra Tjahjani, MT dan pencetakan naskah yang dilakukan oleh Penerbit Yayasan John Hi-Tech Idetama, Jakarta. Untuk semua upaya tersebut, penulis mengucapkan banyak terima kasih.

Dalam penyiapan naskah, penulis juga tetap mendapatkan dorongan dari anggota keluarga, yaitu Rd. Henniwaty (istri), Susan, Arief, Arieska, Johanna, Charles, Jonathan, David, dan Timothy (anak), serta Michael, Sakura, Karel, Aidan dan Calin (cucu). Untuk mereka itu, penulis tidak lupa menghaturkan rasa haru dan terima kasih.

Jakarta, Juli 2013
Penulis

DAFTAR ISI

BAB

BAB I

DERET TAYLOR, MCLAURIN DAN DERET PANGKAT

1.1 Umum

Fungsi mengambil bentuk berbagai rupa, antara lain fungsi polinomial, trigonometris, transenden dan lain-lain. Salah satu jenis memiliki kelebihan ataupun kekurangan dibandingkan dengan jenis lainnya. Sebagai contoh, fungsi trigonometris memiliki sifat periodik, sebagai suatu sifat kelebihan dibandingkan dengan jenis fungsi lainnya. Fungsi polinomial memiliki sifat kemudahan dalam menghitung nilai fungsi untuk suatu nilai variabel yang diminati. Fungsi yang biharmonis merupakan solusi dari pada sistem persamaan diferensial, dan sebagainya.

Sifat kemudahan dalam mengevaluasi nilai fungsi polinomial, menjadi dasar pemikiran dalam mengembangkan fungsi dalam bentuk deret polinomial. Inilah yang menjadi dasar pemikiran dalam pengembangan fungsi atas deret Taylor dan McLaurin seperti dalam bahasan bab ini.

1.2 Pengembangan Fungsi Bervariabel Tunggal Atas Deret

Dalam bahasan berikut ini, dipaparkan pengembangan fungsi bervariabel tunggal atas deret. Deret yang dimaksudkan adalah deret Taylor, deret McLaurin dan deret pangkat. Seperti akan terlihat nantinya, semua bentuk deret tersebut berkaitan antara sesamanya.

1.2.1 Deret Taylor Fungsi Bervariabel Tunggal

Untuk memulai, kita memandang suatu fungsi bervariabel tunggal $f(x)$ yang dengan turunan-turunannya menerus dalam domain $[x_0, x_n]$. Sekarang kita mengembangkan fungsi di sekitar $x = a$ pada mana fungsi dan turunan-turunannya juga menerus, dalam bentuk

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + ... + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + ... \qquad (1.2.1)$$

Jika fungsi dapat dikembangkan dalam deret seperti bentuk Pers. (1.2.1), dikatakan bahwa fungsi analitik di sekitar titik $x = a$, dan deret tersebut bersifat manunggal bagi fungsi. Bentuk deret dalam Pers. (1.2.1) dinamakan deret Taylor bagi pengembangan fungsi di sekitar titik tersebut.

Jika untuk $|x-a|$ yang meningkat, dihadapi kasus bahwa deret tidak konvergen maka tidak ada lagi daerah di sekitar $x = a$ yang cukup dekat yang menjamin

BAB II
DERET FOURIER

2.1 Umum

Dalam bab sebelumnya telah dibahas mengenai berbagai jenis fungsi serta sifat-sifat masing-masing yang memberikan perbedaan antara jenis-jenis fungsi. Sebagai contoh, fungsi polynomial sangat sederhana dalam proses penentuan nilai fungsi berkaitan dengan nilai variabel bebas tertentu yang diminati. Dalam bab terdahulu dibahas contoh-contoh fungsi trigonometris dan transenden yang nota bene sulit dihitung nilainya untuk nilai variabel yang diminati, namun setelah dituangkan dalam deret polynomial, menjadi sederhana dan relatif mudah dievaluasi.

Dalam bab ini, dibahas mengenai penuangan fungsi ke dalam deret yang melibatkan fungsi-fungsi trigonometris elementer, yaitu fungsi sinus dan kosinus. Deret yang demikian dinamakan deret Fourier. Karena deret Fourier melibatkan fungsi sinus dan kosinus, yang nota bene merupakan fungsi-fungsi biharmonis, maka pengembangan fungsi atas deret Fourier sangat bermanfaat di dalam menentukan solusi non-eksak dari persamaan diferensial, sebagai mana akan dibahas berikut ini.

2.2 Solusi Non-eksak Persamaan Diferensial

Untuk memberikan gambaran awal, maka kita meninjau suatu persamaan diferensial biasa non-homogen dalam bentuk

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\lambda^2 y=r(x)\ ;\quad \lambda\ \ tetap \tag{2.2.1}$$

dengan solusi yang didekomposir atas solusi homogen dari

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\lambda^2 y=0\ ;\quad \lambda\ \ tetap \tag{2.2.2}$$

dan solusi partikulir yang berkaitan dengan $r(x)$. Solusi homogen sebagai bagian dari solusi total yang memenuhi Pers. (2.2.1), diusulkan dari fungsi eksponensial

$$y=e^{\alpha x}\ ;\quad \alpha\ \ tetap \tag{2.2.3}$$

yang memiliki sifat penciutan magnitude (*decaying effect*) seturut sifat gelombang. Substitusi bentuk dalam Pers. (2.2.3) dalam Pers. (2.2.2) memberikan

$$(\alpha^2+\lambda^2)e^{\alpha x}=0 \tag{2.2.4}$$

yang mengharuskan

BAB III

TRANSFORMASI LAPLACE

3.1 Umum

Transformasi Laplace merupakan metoda yang sangat sering digunakan di dalam operasi matematika. Dari antara berbagai terapan, penggunaan transformasi Laplace dalam solusi persamaan diferensial merupakan yang paling popular. Teknik transformasi Laplace pada hakekatnya merupakan pemanfaatan sifat bawaan dari fungsi eksponensial elementer, yang bernilai satuan untuk titik awal, serta memiliki pengaruh peredaman nilai fungsi untuk lokasi tak hingga.

Berbeda dengan teknik solusi sistem persamaan diferensial yang lazim, di mana solusi dibagi atas dua tahap, yaitu solusi homogen dan solusi partikulir, maka solusi persamaan diferensial dengan teknik transformasi Laplace, mendapatkan solusi dengan sekali jalan (*one-time solution*), sebagai mana akan diperlihatkan dalam pembahasan nantinya.

Untuk menerangkan hal ini, kita meminjam serta meninjau persamaan diferensial biasa dengan koefisien konstan, yang berorde pertama sebagai berikut.

$$\frac{dy}{dx} - y = e^{\alpha x} \tag{3.1.1}$$

di mana $y = f(x)$ dan α suatu konstanta. Penyelesaian persamaan diferensial mencakup penentuan $f(x)$ yang memenuhi persamaan yang melibatkan fungsi beserta turunannya, seperti dalam Pers. (3.1.1).

Sekarang kita mengalikan Pers. (3.1.1) dengan e^{-sx}, lalu mengintegrasikan suku-suku persamaan dalam domain $[0,+\infty)$ sebagai berikut

$$\int_0^\infty y' e^{-sx} dx - \int_0^\infty y e^{-sx} dx = \int_0^\infty e^{(\alpha-s)x} dx \tag{3.1.2}$$

Perhatikan bahwa faktor pengali e^{-sx} memiliki sifat bawaan bahwa $e^{-sx} = 1$ untuk $x = 0$, dan limit faktor pengali tersebut bernilai nol untuk $x \to +\infty$ sebagai efek peredaman nilai integrasi untuk $x \to +\infty$ untuk nilai $s > \alpha$ yang cukup besar. Integrasi pertama pada ruas kiri Pers. (3.1.2) dapat dilakukan dengan teknik bertahap (*integration by parts*), dengan hasil

$$\int_0^\infty y' e^{-sx} dx = y e^{-sx}\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty y' e^{-sx} dx \tag{3.1.3}$$

BAB IV

FUNGSI BERVARIABEL KOMPLEKS

4.1 Umum

Sebelumnya, kita telah mempelajari teori mengenai bilangan, dengan bilangan kompleks sebagai salah satu jenis dari bilangan. Kita juga telah mempelajari definisi, teori serta operasi aljabar yang berlaku terhadap bilangan kompleks. Namun demikian, kalkulus variabel kompleks, termasuk diferensiasi dan integrasi belum dapat dibahas, menunggu pembahasan fungsi bervariabel bebas banyak, karena konsep-konsep seperti ini dibutuhkan di dalam kalkulus variabel kompleks.

Bab ini ditujukan bagi pembahasan variabel kompleks, beserta diferensiasi serta integrasi. Pengetahuan awal mengenai konsep bilangan kompleks, serta diferensiasi serta integrasi variabel bebas tunggal dan majemuk, merupakan bahan dasar bagi pemahaman akan isi bahasan dalam bab ini. Karena itu, konsep-konsep dasar tersebut tidak akan diulangi lagi dalam bahasan bab ini. Sekalipun demikian, beberapa rumus penting akan dirangkum sebagai rujukan.

4.2 Variabel Kompleks

Bilangan kompleks dapat dinyatakan dalam tiga cara penulisan dalam format berikut ini,

$$\alpha = \begin{cases} a + bi \\ r(\cos\phi + i\,\sin\phi) \\ r\,e^{i\phi} \end{cases} \tag{4.2.1}$$

di mana

$$\begin{aligned} a &= \mathrm{Re}(\alpha) \\ b &= \mathrm{Im}(\alpha) \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

dan

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ \phi &= \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

Besaran r dinamakan modulus dan ϕ argumen dari pada bilangan kompleks α. Sekarang, didefinisikan variabel kompleks z yang dituliskan dalam format cara pertama, yaitu

$$z = x + yi \tag{4.2.4}$$

dengan x dan y sebagai variabel. Dengan demikian, z menjadi variabel kompleks dengan

BAB V
PENGANTAR KEPADA PERSAMAAN DIFERENSIAL

5.1 Umum

Dalam kehidupan sehari-hari, kita sering dihadapkan kepada fenomena fisis yang jika diformulasikan secara matematis, di dalam langkah antara proses analisis, bermuara kepada hubungan antara variabel bebas dan tidak bebas dalam bentuk persamaan diferensial. Persamaan tersebut perlu disolusikan untuk mendapatkan jawab yang pada gilirannya digunakan dalam tatanan analisis yang lengkap.

Beberapa contoh yang dapat disebutkan antara lain, adalah rambatan gelombang getaran gempa tektonis atau vulkanis, getaran kabel gantungan jembatan akibat terpaan angin, getaran pelat lantai atau gelagar jembatan akibat kendaraan yang melintas, intrusi air laut dalam lapisan tanah di sepanjang pantai, rambatan panas dalam peralatan fabrik, getaran sayap pesawat terbang, seretan arus sungai terhadap pilar jembatan dan lain sebagainya. Dengan itu, kepiawaian dalam penyusunan dan penyelesaian persamaan diferensial sangatlah perlu dan dibutuhkan.

Itulah juga sebabnya maka dalam kesempatan ini secara tersendiri dibahas segala aspek yang terkait dengan persamaan diferensial, termasuk penyusunan, penggolongan serta teknik solusi yang digunakan.

5.2 Beberapa Contoh Persamaan Diferensial

Beberapa contoh dari fenomena fisis yang kerap dihadapi dalam terapan rekayasa, dengan penyusunan serta penyataan problem secara lengkap, disajikan dalam paparan pasal ini. Contoh-contoh berikut ini diharapkan dapat memberikan gambaran yang memadai mengenai kaitan antara fenomena fisis dengan formulasi matematis yang koresponden.

5.2.1 Gerakan Osilasi Bandul

Suatu bandul dengan massa m dan massa kabel yang diabaikan, diperlihatkan dalam Gambar 5.2.1. Dengan mengabaikan tahanan udara dan deformasi elastik kabel, maka lintasan bandul akan berbentuk lingkaran dengan gaya tarikan T pada kabel dan gaya gravitasi pada bandul sebesar mg yang bekerja. Apabila simpangan bandul dinyatakan dengan sudut ϕ maka akan muncul gaya restorasi R pada bandul yang merupakan fungsi dari waktu t. Keseimbangan gaya-gaya di arah radial dan tangensial lintasan memberikan

$$\begin{aligned} T(t) &= mg\sin\phi(t) \\ R(t) &= mg\cos\phi(t) \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

yang untuk sudut kecil, bisa didekati dengan

BAB VI

PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA
LINIER ORDE PERTAMA

6.1 Umum

Persamaan diferensial biasa berorde pertama adalah persamaan diferensial yang melibatkan fungsi dan turunan orde pertama. Bentuk dari persamaan diferensial semacam ini sangatlah sederhana, namun dapat muncul dalam berbagai varian bentuk, yang masing-masing dapat deselesaikan dengan cara solusi yang sesuai.

Persamaan diferensial biasa berorde pertama akan kita tinjau sebagai jenis persamaan diferensial yang paling sederhana. Pemahaman kita dalam menangani persamaan diferensial biasa berorde pertama, akan sekaligus menjadi pengetahuan awal bagi pemahaman persamaan diferensial berorde lebih tinggi dan dengan bentuk yang lebih kompleks.

Karena itu, di dalam penanganan persamaan diferensial biasa berorde pertama kita akan menerapkan pola penanganan yang lebih konsepsional, karena langkah-langkah yang seperti ini akan ditempuh juga di dalam penanganan persamaan diferensial berorde lebih tinggi.

6.2 Beberapa Varian Persamaan Diferensial Biasa Orde Pertama

Dalam hal ini, kita menghadapi fungsi bervariabel bebas tunggal berbentuk eksplisit

$$y = f(x) \tag{6.2.1}$$

ataupun dalam bentuk implisit

$$F(x,y) = 0 \tag{6.2.2}$$

yang akan memberikan bentuk-bentuk persamaan diferensial yang berkaitan. Bentuk eksplisit dalam Pers. (6.2.1) memberikan

$$\frac{dy}{dx} \equiv f'(x) = r(x) \tag{6.2.3}$$

yang merupakan persamaan diferensial biasa yang linier dan nonhomogen. Bentuk implisit dalam Pers. (6.2.2) memberikan

$$dF(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0 \tag{6.2.4}$$

BAB VII

PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA ORDE PERTAMA NON LINIER

7.1 Umum

Dalam bab sebelumnya telah dibahas persamaan diferensial biasa berorde pertama linier dalam turunan pertama. Bentuk linier dalam turunan pertama dy/dx, memungkinkan bentuk pemisahan dy dan dx, yang pada gilirannya memungkinkan pula bagi langkah pemisahan variabel. Aspek pemisahan semacam ini memungkinkan penerapan beberapa metoda penyelesaian yang sederhana.

Dalam bab ini kita akan membahas bentuk-bentuk persamaan diferensial biasa, tetapi yang berpangkat lebih tinggi dalam dy/dx. Sebagai contoh, kita dapat menghadapi persamaan diferensial dalam bentuk-bentuk

$$\begin{aligned} &\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x\left(\frac{dy}{dx}\right) + y^2 = 0 && (a) \\ &\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right) + y = 0 && (b) \qquad (7.1.1) \\ &\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0 && (c) \end{aligned}$$

Bentuk dalam Pers. (7.1.1a) merupakan persamaan diferensial biasa berorde pertama non-linier, karena mengandung suku kuadrat dalam dy/dx dan y. Dalam bentuk Pers. (7.1.1b), variabel bebas x absen dalam persamaan, sedangkan dalam Pers. (7.1.1c), variabel tidak bebas y absen dalam persamaan.

Kita akan membahas teknik solusi dari bentuk-bentuk semacam itu. Untuk penyingkatan penulisan, kita akan menggunakan notasi

$$p = \frac{dy}{dx} \qquad (7.1.2)$$

dan bentuk solusi yang dicari adalah dalam bentuk fungsi implisit

$$F(x, y, p) = 0 \qquad (7.1.3)$$

Dalam bentuk implisit semacam ini, diperoleh

$$p = \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y} \qquad (7.1.4)$$

BAB VIII

EKSISTENSI DAN KEMANUNGGALAN SOLUSI PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA

8.1 Umum

Sebagai mana lazimnya dengan solusi problem analisis lainnya, mengenai solusi persamaan diferensial biasa, dihadapkan dua pertanyaan yang sangat penting dan sentral. Pertama, apakah solusi persamaan diferensial ada atau tidak. Yang kedua, jika solusi memang ada, apakah solusi tersebut tunggal atau jamak. Dengan demikian, aspek eksistensi dan kemanunggalan solusi persamaan diferensial, perlu dikaji lanjut.

Bab ini khusus ditujukan bagi pembahasan mengenai eksistensi dan kemanunggalan solusi persamaan diferensial; dalam hal ini, persamaan diferensial biasa berorde pertama, yang telah dibahas dalam bab sebelumnya. Namun demikian, bahasan dalam bab ini juga akan bermanfaat dalam kasus persamaan diferensial biasa berorde tinggi, dan persamaan diferensial parsial.

8.2 Solusi Pendekatan Berturutan

Solusi pendekatan berturutan (*successive approximation*) kita bahas dalam pasal ini, terlebih-lebih adalah untuk menunjukkan eksistensi solusi persamaan diferensial, ketimbang untuk mendapatkan solusi itu sendiri. Dalam hal ini, kita meninjau suatu persamaan diferensial biasa berorde pertama linier, yang dapat dituliskan di dalam format

$$dy = f(x,y)\,dx \tag{8.2.1}$$

yang jika diintegrasikan, memberikan

$$y = y_0 + \int f(x,y)\,dx \tag{8.2.2}$$

yang sebenarnya tidak betul, karena adanya y dalam integran. Untuk itu, digunakan nilai asumsi pertama dari y, yang dinyatakan dalam y_0. Dengan demikian, diperoleh rumus

$$y_{(n)} = y_0 + \int_{x_0} f(x,y_0)\,dx \tag{8.2.3}$$

Rumus dalam Pers. (8.2.3) diterapkan berulang-ulang secara berurutan, yang pada proses ke-n diperoleh

$$y_{(n)} = y_0 + \int_{x_0} f(x,y_{(n-1)})\,dx \tag{8.2.4}$$

yang dinamakan metoda solusi Picard (*Picard's method of solution*). Sebagai contoh, kita ingin menyelesaikan persamaan diferensial

BAB IX

TEOREMA DASAR PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA LINIER

9.1 Umum

Dalam bab-bab sebelumnya telah dibahas persamaan diferensial biasa berorde pertama, baik yang linier maupun yang tidak. Bahasan-bahasan mencakup teorema dasar, definisi, jenis dan teknik solusi yang dapat diterapkan. Teorema mengenai eksistensi dan kemanunggalan dari solusi persamaan diferensial juga telah dibicarakan.

Sekarang, tiba saatnya untuk membahas persamaan diferensial biasa dengan orde yang lebih tinggi. Namun, dalam terapan kita akan lebih kerap menghadapi persamaan diferensial biasa dengan orde yang lebih tinggi, dibandingkan dengan tingkat nonlinearitas. Atas dasar itu, secara umum kita akan lebih menekankan bahasan kepada kasus persamaan diferensial biasa yang linier, dengan orde yang lebih tinggi.

Dalam bahasan, kita akan kerap merepresentasikan persamaan diferensial biasa berorde tinggi dengan orde kedua, demi alasan kesederhanaan pembahasan, tanpa mengurangi keabsahan serta sifat berlakunya secara umum.

9.2 Beberapa Definisi Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial yang melibatkan variabel tidak bebas y dengan variabel bebas x, di mana

$$y = f(x) \qquad (9.2.1)$$

dalam bentuk

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = r(x) \qquad (9.2.2)$$

yang dinamakan persamaan diferensial biasa linier non-homogen berorde n. Dikatakan linier, karena persamaan diferensial tidak mengandung suku-suku nonlinier dalam y maupun turunannya, misalnya $y''y, y'y$ dan sebagainya. Dikatakan nonhomogen, karena hadirnya fungsi $r(x)$ yang bebas dari y. Fungsi-fungsi $(a_k(x), k = 0,n)$ merupakan koefisien-koefisien dari persamaan. Jika $(a_k(x) = a_k, k = 0,n)$ tetap, maka dihadapi kasus persamaan diferensial biasa yang linier dan homogen berkoefisien konstan. Jika $r(x) = 0$, maka Pers. (9.2.2) menjadi

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0 \qquad (9.2.3)$$

BAB X

PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA LINIER BERKOEFISIEN KONSTAN

10.1 Umum

Persamaan diferensial biasa yang linier telah dibahas dalam bab yang sebelumnya. Pembahasan mencakup konsep dasar, definisi serta penentuan solusi termasuk sistem fundamental solusi komplementer, eksistensi serta kemanunggalan solusi. Teorema dasar tersebut berlaku baik terhadap persamaan biasa linier berkoefisien konstan maupun variabel.

Sebagai penerapan pertama, dalam bab ini dibahas persamaan diferensial biasa linier dengan koefisien konstan, dalam bentuk

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = r(x) \qquad (10.1.1)$$

di mana $a_k, k = 0, n$ merupakan konstanta bilangan riel. Untuk solusi, proses dibagi atas dua tahap, yaitu penentuan solusi komplementer dan penentuan solusi partikulir sesuai dengan $r(x)$ yang dihadapi.

10.2 Penentuan Sistem Fundamental Dari Solusi

Dari bentuk persamaan diferensial biasa linier homogen berkoefisien konstan

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0 \qquad (10.2.1)$$

kita melihat bahwa sistem fundamental dari solusi persamaan diferensial berorde rendah juga merupakan sistem fundamental solusi persamaan diferensial berorde lebih tinggi. Dengan pola pandang ini, kita akan menyusun sistem fundamental dari solusi persamaan diferensial berorde pertama, yang nantinya akan digunakan sebagai panduan dalam penentuan sistem fundamental solusi persamaan diferensial berorde lebih tinggi.

10.2.1 Sistem Fundamental Solusi Persamaan Diferensial Orde Pertama

Persamaan diferensial biasa linier homogen berorde pertama berkoefisien konstan mengambil bentuk

BAB XI

PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA LINIER BERKOEFISIEN VARIABEL

11.1 Umum

Persamaan diferensial biasa linier berkoefisien konstan telah dibahas di dalam bab yang sebelumnya. Koefisien-koefisien bernilai riel konstanta sangat memberikan kemudahan. Koefisien-koefisien yang konstan tersebut memungkinkan penentuan solusi yang eksak, dan menerus untuk seluruh domain. Dalam kasus ini, diperoleh persamaan pelengkap yang mengundang sistem fundamental dari solusi yang merupakan fungsi-fungsi yang terdefinisi serta menerus dalam semua domain.

Hal seperti tersebut di atas tidak ditemukan dalam kasus persamaan diferensial biasa yang linier namun dengan koefisien-koefisien yang variabel. Dalam kasus seperti ini, solusi pada umumnya dicari di dalam bentuk deret pangkat (*power series*), atau dengan aproksimasi yang berturutan (*successive approximation*).

Bab ini membahas penentuan solusi persamaan diferensial biasa berkoefisien variabel, dalam bentuk deret pangkat. Namun akan segera terlihat bahwa penentuan solusi semacam ini, berlaku juga bagi persamaan diferensial biaya yang berkoefisien konstanta.

11.2 Persamaan Diferensial Biasa Berkoefisien Variabel

Kita sekarang meninjau persamaan diferensial biasa linier non-homogen yang seumumnya tidak berkoefisien tetap, dalam bentuk

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^n}+\ldots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=r(x) \qquad (11.2.1)$$

dalam mana $\{a_i(x), i=0,n\}$ merupakan koefisien suku-suku persamaan diferensial yang merupakan fungsi dari pada x. Pertanyaan sekarang adalah bagai mana menyusun solusi persamaan diferensial untuk koefisien yang variabel. Ini menjadi bahasan dari pada bab ini.

11.3 Solusi Persamaan Diferensial Dalam Bentuk Deret

Kita sekarang meninjau persamaan diferensial biasa linier homogen yang seumumnya tidak berkoefisien tetap, dalam bentuk

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^n}+\ldots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=0 \qquad (11.3.1)$$

BAB XII

PERSAMAAN DIFERENSIAL LINIER SIMULTAN

12.1 Umum

Dalam terapan sering dihadapi kasus di mana proses analisis bermuara kepada lebih dari satu persamaan yang melibatkan diferensial yang harus disolusikan. Sebagai contoh, fungsi-fungsi

$$y_1 = y_1(x); \qquad y_2 = y_2(x) \tag{12.1.1}$$

dilibatkan dalam persamaan

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + b_1(x) \\ \frac{dy_2}{dx} &= a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + b_2(x) \end{aligned} \tag{12.1.2}$$

yang harus diselesaikan dengan solusi berbentuk seperti dalam Pers. (12.1.1). Metoda penyelesaian seperti ini menjadi bahasan dalam bab ini.

12.2 Sistem Persamaan Diferensial Biasa Simultan

Sistem persamaan diferensial biasa simultan linier dapat dinyatakan di dalam bentuk

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}y_1 &= a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ldots + a_{1n}(x)y_n + b_1(x) \\ \frac{d}{dx}y_2 &= a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \ldots + a_{2n}(x)y_n + b_2(x) \\ \frac{d}{dx}y_n &= a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ldots + a_{nn}(x)y_n + b_n(x) \end{aligned} \tag{12.2.1}$$

yang merupakan sistem persamaan linier berorde pertama, serta berukuran $(n \times n)$. Sistem persamaan diferensial dalam Pers. (12.2.1) dapat dituliskan dalam notasi matriks

$$\begin{Bmatrix} \frac{d}{dx}y_1 \\ \frac{d}{dx}y_2 \\ \vdots \\ \frac{d}{dx}y_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \vdots & & & \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix} \tag{12.2.2}$$

atau

BAB XIII
PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL

13.1 Umum

Dalam beberapa bab yang terdahulu, telah dibahas persamaan diferensial yang melibatkan fungsi atau fungsi-fungsi yang bervariabel bebas tunggal. Beserta turunan-turunannya dalam suatu persamaan, atau sistem persamaan simultan. Karena berurusan dengan satu variavel bebas saja, semua bentuk-bentuk turunan merupakan turunan total terhadap variabel bebas.

Sebagai bentuk yang paling sederhana, solusi dari persamaan diferensial biasa yang linier dengan koefisien-koefisien konstan dimulai dari solusi komplementer berupa kombinasi linier dari sistem fundamental dari solusi. Solusi partikulir dapat dicari derngan bantuan sistem fundamental dari solusi, yaitu dengan cara koefisien variasi, atau dengan cara koefisien tidak tentu. Untuk kasus persamaan diferensial biasa yang linier, ataupun linier namun dengan koefisien yang tidak konstan, cara-cara sederhana seperti tersebut di atas tidak lagi dapat diterapkan secara umum.

Sangat kontras dengan persamaan diferensial biasa, persamaan diferensial parsial melibatkan fungsi atau fungsi-fungsi bervariabel bebas jamak. Persamaan diferensial dengan demikian, melibatkan turunan-turunan parsial dari fungsi terhadap variabel bebas. Dalam kasus persamaan diferensial parsial, solusi umum berkaitan dengan fungsi-fungsi sembarang dari fungsi khusus atau spesifik. Dengan demikian, konsep sistem fundamental dari solusi tidak lagi berlaku dalam kasus persamaan diferensial parsial.

Sebagai contoh, persamaan diferensial parsial yang menyangkut suatu fungsi

$$z = f(x,y) \tag{13.1.1}$$

dalam bentu

$$2\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \tag{13.1.2}$$

memiliki solusi berupa fungsi

$$z = f(x+2y) \tag{13.1.3}$$

yang sembarang asalkan diferensiabel. Solusi ini dapat diverifikasi dengan menurunkan fungsi sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial(x+2y)} \frac{\partial(x+2y)}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial(x+2y)} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial(x+2y)} \frac{\partial(x+2y)}{\partial y} = 2\frac{\partial f}{\partial(x+2y)} \end{aligned} \tag{13.1.4}$$

BAB XIV

BEBERAPA PROBLEM FISIKA MATEMATIKA

14.1 Umum

Dalam terapan, berbagai fenomena fisika, baik fisika bahan padat maupun cair dapat diformulasikan dan dianalisis sebagai problem fisika matematika. Dalam tatanan formulasi permasalahan, analisis melibatkan persamaan diferensial yang harus diselesaikan dalam mana solusi harus memenuhi syarat awal dan syarat batas tertentu. Dalam hal ini, penyelesaian persamaan diferensial yang secara mendalam dalam bab-bab sebelumnya, dapat diterapkan. Bab ini khusus ditujukan bagi pembahasan beberapa fenomena fisik, antara lain rambatan gelombang dan rambatan suhu.

Vibrasi ataupun rambatan gelombang merupakan fenomena yang terjadi dalam suatu sistem, diakibatkan adanya gaya atau pengaruh luar yang bekerja atas sistem. Khususnya sistem yang terbuat dari bahan yang memiliki kelembaman massa. Dalam kaitan ini, kita menggantikan sistem dalam spektrum yang sangat luas, mulai dari senar alat musik spektrum yang sangat luas, dari senar alat musik yang dipetik, membrane bedug yang ditabuh, menara yang ditiup angin, gelegar jembatan yang digetarkan oleh kendaraan yang melintas, komponen mesin yang bergetar, dan bangunan tinggi yang mengalami eksitasi gempa.

Dalam terapan, fenomena vibrasi atau rambatan gelombang penting untuk dipelajari karena berbagai alasan. Pertama, getaran akan menimbulkan respons tambahan dari sistem, berupa gaya-gaya dalam dan perpindahan. Selain itu, dapat dihadapi kemungkinan bahwa sistem akan beresonansi dengan gaya luar, yang dapat menimbulkan ampli fikasi, baik dalam gaya reaksi ataupun perpindahan. Begitu sangat luasnya fenomena vibrasi atau rambatan gelombang, sehingga semuanya tidak akan mungkin dibahas tanpa batas. Karena itu, dalam bab ini hanya akan dibahas beberapa contoh saja. Pembaca yang ingin mempelajari vibrasi secara lebih mendalam, dapat merujuk kepada beberapa referensi yang tersedia. Dalam bab ini, penekanan terutama ditujukan bagi teknik penyelesaian problem vibrasi sebagai problem yang tertuang di dalam bentuk persamaan diferensial.

Dalam aspek yang analog, rambatan suhu dalam suatu sistem dengan gradient tertentu juga akan mengakibatkan timbulnya perpindahan dan gaya-gaya dalam berupa tambahan atas perpindahan dan gaya-gaya yang ditimbulkan baik oleh bobot sendiri maupun gaya-gaya luar. Dengan demikian, pengaruh suhu atas suatu sistem sangat penting untuk dipelajari.

Kalau rambatan gelombang dan rambatan suhu umumnya terjadi dalam sistem berbahan padat, maka dalam bahan cair atau fluida kita perlu mempelajari aspek aliran fluida sebagai bahan yang cair dan tak mampu mampat.

PUSTAKA TAMBAHAN

1. Fort, T., *Differential Equations,* Holt, Rinehart and Winston, Inc., edisi pertama (1960).

2. Hildebrand, F.B., *Advanced Calculus for Applications,* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, edisi kedua (1976).

3. Hornbeck, R.W., *Numerical Methods,* QPI Series, Quantum Publishers, Inc., New York (1975).

4. Purcell, E.J., dan D. Varberg, *Calculus with Analytic Geometry,* terjemahan oleh Penerbit Erlangga, Jakarta (1987).

5. Stroud, K.A., dan D.J. Booth, *Engineering Mathematics,* terjemahan oleh Penerbit Erlangga, Jakarta (2001).

Binsar Halomoan Hariandja lahir di Pangaribuan 9 Juli 1948. Setelah lulus dari Sekolah Menengah Atas (SMA) Tarutung Tahun 1966, penulis meneruskan studi di Departemen Teknik Sipil, Institut Teknologi Bandung dan lulus sarjana teknik Tahun 1972. Pendidikan lanjut diperolehnya dari Asian Institute of Technology, Bangkok, Thailand (Master of Engineering, 1975); University of Illinois at Urbana-Champaign, USA (Philosophy of Doctor, 1985); Kursus Singkat Angkatan (KSA-IV), Lembaga Ketahanan Nasional (Lemhannas), Departemen Pertahanan dan Keamanan Republik Indonesia Tahun 1994; dan Kursus Applied Approach, Dikti, Departemen Pendidikan dan Kebudayaan Republik Indonesia Tahun 1990.

Sejak Tahun 1973, mengajar di Jurusan Teknik Sipil, Institut Teknologi Bandung dan Tahun 1999 diangkat sebagai Guru Besar Teknik Sipil. Penulis mengajar bahan kuliah mekanika teknik, struktur beton bertulang dan metoda elemen hingga. Penulis adalah pemegang hak patent 4 (empat) sistem struktur beton pracetak dan aktif dalam penyusunan Peraturan Beton Indonesia.

Lahir di Lampung, memperoleh gelar Sarjana Teknik Sipil (Ir) dari ISTN Jakarta, S2 Magister Teknik Sipil (MT) dari Universitas Indonesia (UI), S2 Magister Manajemen (MM) dari IPWI dan Magister Sains (MSi) dari Universitas Indonesia (UI). Sedang menyelesaikan Program Doktor Teknik Sipil di Institut Teknologi Bandung (ITB).

Mengawali karir pada perusahaan Multi Nasional kimia konstruksi, selanjutnya mendirikan perusahaan John Hi-Tech Contrindo tahun 1994 yang bergerak di bidang kimia konstruksi dan Concrete repair, PT John Idetama Teknik tahun 1997 bergerak di bidang produk inovasi, dan Yayasan John Hi-Tech Idetama bergerak dalam bidang Pelatihan, Seminar, dan Penerbitan. Dosen Teknik Sipil di Universitas Pancasila, Jakarta dan tergabung dalam beberapa organisasi profesi seperti AII, IAPPI, dan Masyarakat Nano Indonesia.

JHI

Penerbit John Hi-Tech Idetama

Jl. Rawa Bambu Raya No 17 A
Pasar Minggu Jakarta 12520
Telp. 021-7827947 Fax. 021-7827966
e-mail: jbg@cbn.net.id

ISBN 978-979-1124-12-6
9 789791 124126